

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Matricea sistemului A conține un minor nenul de ordin 2 (spre exemplu $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$), deci $\text{rang } A \geq 2$.

Dacă A are rangul 2, atunci $\det A = 0$ (singurul minor de ordin 3). Avem $\det A = 2(m-1)$, deci $\det A = 0 \Rightarrow m = 1$.

b) Dacă $x_0 + y_0 + z_0 = 4$, din a treia ecuație a sistemului rezultă $x_0 = 2$, $y_0 + z_0 = 2$. Folosind și a doua ecuație rezultă $y_0 = z_0 = 1$. Atunci, din prima ecuație a sistemului rezultă $m = \frac{1}{2}$.

c) Sistemul are soluție unică dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$.

Aplicând regula lui Cramer, rezultă $x = -\frac{1}{m-1}$, $y = 1$, $z = -\frac{m}{m-1}$. $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3 \Rightarrow m-1 \mid 1 \Rightarrow m \in \{0, 2\}$

2.a) $X + 1 \mid f \Rightarrow f(-1) = 0$. Cum $f(-1) = 5 + p \Rightarrow p = -5$.

b) Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ este rădăcină dublă, atunci $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$. Din $f'(\alpha) = 0 \Rightarrow 4(\alpha^3 - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$.

Din $f(\alpha) = 0 \Rightarrow p = 3$.

c) Cum $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j = 0$, dacă polinomul ar avea toate rădăcinile reale, atunci acestea ar fi toate egale cu 0, contradicție.